View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk

brought to you by CORE

provided by Kyoto University Research Information Repository

Kyoto University Research Information Repository

KYOTO UNIVERSITY

Title	マルチキュースイッチにおけるオンラインバッファ管理アルゴリズムの競合比の改良(計算理論とアルゴリズムの新展開)
Author(s)	小林, 浩二; 宮崎, 修一; 岡部, 寿男
Citation	数理解析研究所講究録 (2006), 1489: 91-97
Issue Date	2006-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/58224
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Kyoto University

数理解析研究所講究録
1489 巻 2006 年 91-97

マルチキュースイッチにおける オンラインバッファ管理アルゴリズムの競合比の改良

小林 浩二 [1], 宮崎 修一 [2] 岡部 寿男 [2]
[1] 京都大学 情報学研究科
[2] 京都大学 学術情報メディアセンター

Koji Kobayashi[1], Shuichi Miyazaki[2] and Yasuo Okabe[2]
[1]Graduate School of Informatics, Kyoto University
[2]Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University
kobaya@net.ist.i.kyoto-u.ac.jp, {shuichi, okabe}@media.kyoto-u.ac.jp

Abstract

オンラインバッファ管理問題は，近年，ネットワークにおいて主要な論点となっている QoS (Quality of Service) とスイッチなどのキュー管理をオンライン問題として定式化した問題であり，様々なモデルが考案されている．本稿ではその中の 1 つのモデルであるマルチキュースイッチを扱ったモデルを取り上げる．このモデルの目的はスループットの最大化である．本論文では，グリーディアルゴリズムの競合比の既知の上限を (i) 任意の B, m の場合に 2 から $2-1/m$, (ii)$m=2$ の場合に 1.29 から 1.273 に改良したことにある．m, B はそれぞれスイッチの出力ポートの数とバッファのサイズである．

1 はじめに

今日のネットワークにおけるトラフィックの増加により，パケットの正確で迅速なフォワーディングはネットワークにおいて非常に重要である．結果として，入力ポートに到着したパケットを適切な出力ポートへルーティングするスイッチが高速なネットワークを構成するのに重要な要素となって来る．トラフィックはバースト的に到着する傾向があり，その際のパケットの損失は出来るだけ少なくすることが望ましいことから，スイッチには各ポートに一時的にパケットを保持する為のバッファが用意されている．結果として，このバッファの容量の制限がスイッチにおけるスループットの最大化の為のバッファ管理に関する効果的な戦略についての重要性を増すことになる．故に，[1] 以来，多くのバッファ管理に関する問題の設計と解析が行われている [2, 3, 4, 5, 6].

スイッチのある一つの出力ポートに対して，m 個の入力ポートがあり，各々には最大 B 個までパケットを保持することが出来るバッファが用意されている．これらの入力ポートに対して，新しいパケットが任意の時刻に到着し得り，各バッファに空きがある限り，そのパケットはバッファに新たに保持される．そうでなければ，廃棄されることになる．一定時間に一度，スイッチはパケットの保持するキューを選択し，その先頭のパケットを送信する．本問題の目的は送信されるパケット数の最大化である．

一般に，未来に到着するパケットに関する情報は極めて制限されていることから，未来に到着するパケットの情報を知り得ないとして，オンライン問題として定式化して考察を行う [7]. 即ち，入力 σ に対して，アルゴリズム B のスループットを $T_B(\sigma)$ としたとき，最適なオフラインポリシーを OPT とするとき，決定性のオンラインアルゴリズム A の競合比が c であるとは，任意の入力 σ に対し，$cT_A(\sigma) \geq T_{OPT}(\sigma)$ が成立することを言う．

従来の結果: Azar らは [4] において，グリーディアルゴリズムの競合比の上限が 2 であることを示し，決定性のオンラインアルゴリズムの下限が $B=1$ のとき，$2-1/m$ であり，任意の B のとき，$1.366-\Theta(1/m)$ であることを示した．また，確率アルゴリズム RS の，上限が $e/(e-1)$ であることを示し，任意の確率アルゴリズムの下限として，$B=1$ のときに $1.46-\Theta(1/m)$ となることを示した．Albers らは [2] において，任意の B と十分に大きな m に対し，任意のグリーディポリシーの下限が $2-1/B-\Theta(m^{-1/(2B-2)})$ であることを示し，任意の B と十分に大きな m に対し，任意の決定性アルゴリズムの下限が $e/(e-1)\approx 1.58$，$B=2$ としたとき，任意の決定性アルゴリズムの下限が $13/7\approx 1.86$ であることを示した．また，[4] とは異なる手法で確率アルゴリズムの下限が 1.46 であることを示した．更に，$B\geq 2$ のとき，決定性アルゴリズム Semi-Greedy(SGR) の上限が $17/9\approx 1.89$，$B=2$ のとき，13/7 であることを示している．Itoh らは [5] において，決定性アルゴリズムの下限が 1.466 であることを示している．Azar らは [3] で，決定性アルゴリズム WL の上限が $e/(e-1)\approx 1.58$ であることを示した（Albers らの下限は $B>\log m$ においては適用出来ない）．Schmidt は [6] において，確率アルゴリズムの上限が 3/2 であることを示した．また，$m=2$ のとき，任意の決定性アルゴリズムの下限が $16/13\approx 1.23$ であることを示し，グリーディアルゴリズムの上限が $9/7\approx 1.29$ であることを示している．

本研究の結果: 本研究では任意の B,m に対して，グリーディアルゴリズム（GR）の競合比を 2 から $2-1/m$ がであることを示す．この結果は特に $B=1$ において競合比の上下限が一致する．また，任意の B，$m=2$ に対して，GR の競合比を 1.29 から $14/11=1.273$ に改良した．

2 マルチキュースイッチモデル

2.1 問題の定義（モデル）

マルチキュースイッチモデルは以下のように定義されている．m 個の FIFO キューを持つスイッチを考える．各キューはサイズ B のバッファを持ち，B 個まで同時にパケットを保持することが出来る．パケットはオンラインに各キューに到着し，価値とサイズは均一とする．

各時刻は 2 つのフェイズに分けられている．即ち，キューにパケットの到着する到着フェイズと，キューから送信するパケットを選択してその送信を行う送信フェイズである．到着フェイズにはバッファに空きがある限りパケットをキューに入れることが出来る．送信フェイズには，パケットを有するキューを一つ選び，その先頭のパケット送信する（スケジューリング）．便宜的に，送信フェイズは整数時間に起こるものとする．

問題の目的は送信するパケット数の最大化であり，価値が均一であることから，プリエンプションの有無を考えることは必要は無く，スケジューリングの解析が問題となっている．

2.2 グリーディアルゴリズム

グリーディアルゴリズム (GR) は，以下のようなアルゴリズムである．到着するパケットはバッファに空きがあれば必ず受理し，スケジューリングは最も長いキューからパケットを送信する．最も長いキューが複数存在する場合には，そのうちの任意のキューを選択して送信する．

3 グリーディアルゴリズムの競合比の改良

定理 3.1 $B=1$ において，グリーディアルゴリズムの競合比は高々，$2-1/m$ である．

3.1 解析の概要

GR の競合比を解析を行うに当たり，最適なオフラインポリシー (OPT) のみが受理し，GR が受理できないパケットの数を見積もることを考える．即ち，任意の OPT のみが受理するパケットと GR が受理するパケットとの間に 1 対 $m/(m-1)$ のマッチングを重複無く構成することを考える．このとき，OPT のみが受理するパケットの数を P_{OPT}，OPT と GR が共に受理するパケットの数を P_{CM} とすると，$P_{OPT} \leq \frac{m-1}{m}(P_{GR}+P_{CM})$ より，$T_{OPT}(\sigma) = P_{CM} + P_{OPT} \leq P_{CM} + \frac{m-1}{m}(P_{GR}+P_{CM}) \leq (2-1/m)T_{GR}(\sigma)$ となる．

3.2 証明

以下では，簡単の為に $B=1$ の場合を考える．まず，証明を行っていくに当たり用語，変数を定義する．パケットの到着と送信をイベントと呼ぶ．イベントの起こる時刻 t に対して，$t+$ で，時刻 t のイベントが起こった直後で，その 1 つ後のイベントが起こる前の時刻を表す．k 番目のキューを $Q^{(k)}(1 \leq k \leq m)$ と表記し，時刻 t における，ポリシー A の $Q^{(k)}$ の保持するパケット数を $h_A^{(k)}(t)$ で表す

以下では各イベントに対してマッチングルーチン（後述）を適用することで，以下の様なマッチングを構成可能であることを示す．

マッチング: OPT のみが受理する任意のパケット p に対して GR が受理するパケット $1+1/(m-1)$ 個を重複無くマッチさせる（但し，$1/(m-1)$ は必ずしも整数ではないことに注意せよ）．

ここで，考え得るイベントはパケットの受信（受理，非受理）と送信（可否）について場合分けした 10 通りであるが，このままでは煩雑に過ぎるので以下の 2 つのイベントを解析の対象外と出来る．即ち，GR のみが到着するパケットを受理するイベント，及び GR のみがパケットを送信するイベントは考えないものとする．(ここで OPT と GR は work-conserving であるとしている．この work-conserving とは，OPT も GR も送信フェイズにおいて，送信可能であるならば（そのバッファにパケットを 1 つでも保持するならば），必ずパケットを送信すると言う性質である．)

さて，上記において，OPT のみが受理するパケットに対してマッチングを構成すると述べたが，直接，そのパケットにマッチングを構成することは容易ではない．そこで，マッチングの構成を簡単にする為に，以下の用語及び変数を定義する．時刻 t に，ある $Q^{(k)}$ において，$h_{A_1}^{(k)}(t) < h_{A_2}^{(k)}(t)$ (A_1, A_2 はアルゴリズム）が成立するとき，A_1 の $Q^{(k)}$ の $[h_{A_1}^{(k)}(t)+1, h_{A_2}^{(k)}(t)]$ の位置を $FreeSlot_{A_1}$ と呼ぶことにする（以下，FS_{A_1} と略記する）．また，時刻 t における FS_A の数を $f_A(t)$ で表す．

ここで注意するべきことは OPT のみが受理するパケットは，必ず FS_{OPT} の存在するキューに受理されるということである．即ち，以下では，あらゆる FS_{OPT} に対して，まず便宜的に GR が送信するパケットをマッチさせることとし，FS_{OPT} にパケットが到着した際に改めてそのパケット（OPT のみが受理し得るパケット）に対して，FS_{OPT} が構成していたマッチングを継承する形で構成しなおすこととする．

そのマッチングは図 1 のマッチング・ルーチン（以下，ルーチンと略称）に従い，各イベントの直後に行われるものとする．パケットは $Q^{(k)}$ に到着するものとする．

図 1 のルーチンにおいては任意の GR の受理したパケットは高々 1 個分しか FS_{OPT} とマッチされない．このルーチンが well-defined あれば目的とするマッチングが構成可能であり，ルーチンが well-defined である為には，Case2.3 の実行，具体的には α マッチングと β マッチングが構成可能であることが保証されれば良い．α マッチングについては省略し，β マッチングについてのみ述べる．β マッチングが構成可能であることを保証するためには，β マッチングを構成する必要のある Case2.3 が実行される回数を x とした場合，β マッチングを構成するのに GR が用いるパケットを送信する Case1.1, 2.1, 2.2 が少なくとも $x/(m-1)$ 回は実行されることが保証されれば良い．そこで，パケット送信のイベントに関して，Case2.3 が m 回連続で実行されることはなく，且つ，少なくとも $m-1$ 回 Case2.3 が実行された後には，必ず Case1.1, 2.1, 2.2 の何れかが実行される

送信フェイズ：
Case1: FS_{OPT} が変化しない場合：
Case1.1 : OPT, GR が同じキューからパケットを送信する場合，OPT が $h^{(i)}_{OPT}(t-) > h^{(i)}_{GR}(t-)$，$GR$ が $h^{(j)}_{GR}(t-) \leq h^{(j)}_{OPT}(t-)$ $(i \neq j)$ となるキューからパケットを送信する場合：終了
Case1.2 : OPT のみが送信する場合：終了
Case2: FS_{OPT} が変化する場合：
Case2.1: $f_{OPT}(t-) = f_{OPT}(t+)$ の場合：
時刻 $t-$ まで FS_{OPT} だった位置へのマッチングを，
時刻 t に新しく FS_{OPT} となった位置へマッチングをつけなおす.
Case2.2: $f_{OPT}(t-) > f_{OPT}(t+)$ の場合：終了
Case2.3: $f_{OPT}(t-) < f_{OPT}(t+)$ の場合：
新しく生じた FS_{OPT} に対して以下のマッチングを構成する.
α マッチング：時刻 t に GR が送信したパケット1個をマッチさせる
β マッチング：時刻 t より後に GR が Case1.1, Case2.1, Case2.2 で送信するパケットで，未だマッチングに用いていないパケットを $1/(m-1)$ 個マッチさせる.
到着フェイズ：
Case3: OPT と GR が共に受理する場合：終了
Case4: OPT のみが受理する場合：
$h^{(k)}_{OPT}(t-) + 1 = h^{(k)}_{OPT}(t+)$ の FS_{OPT} へのマッチングを $h^{(k)}_{OPT}(t+)$ の位置に受理したパケットに付け直す.

Figure 1: マッチング・ルーチン（時刻 t）

ことを示す．最初に，Case2.3 が m 回連続で実行されることはあり得ないことを示す.

補題 3.2 任意の時刻 t において，$f_{GR}(t) \leq m-1$ が成立する.

系 3.3 ある時刻の間に GR が m 個（m 回）のパケットを送信する場合，*Case2.3* が m 回数続くことは無い.

次に，少なくとも $m-1$ 回 Case2.3 が実行された後には，パケット送信のイベントにおいて，必ず Case1.1, Case2.1, Case2.2 の何れかが実行されることを示す.

補題 3.4 GR が最後に送信するパケットについて，ルーチンは *Case2.3* を実行しない.

補題 3.5 *Case2.3* を実行した直後のパケットの送信イベントにおいて，*Case1.2* が実行されることはない.

GR が最後のパケットを送信してしまった後にはパケットを1つもバッファにもっていないので必ず Case1.2 が実行されることと，系 3.3，補題 3.4，3.5 より，少なくとも $m-1$ 回 Case2.3 が実行された後には，パケット送信のイベント (S) において，必ず Case1.1, 2.1, 2.2 の何れかが実行されることを示された．このことから，β マッチングが構成可能であることが示された．よって，ルーチンは well-defined であり，定理 3.1 を導くことが出来る.

この定理と，[4] の結果から $B=1$ の競合比が一致する．また，[6] の Theorem 1 より，以下のことが言える.

定理 3.6 $\forall B$ において，グリーディアルゴリズムの競合比は高々，$2-1/m$ である．

4　$m=2$ における競合比の改良

定理 4.1 任意の入力 σ に対し，GR の競合比は高々 14/11 である．

4.1　解析の概要

GR の競合比解析を行うに当たり，解析の対象とする入力を，ある性質をもつ入力に限定可能であることを示すことを考える．そのとき，その入力に対して，OPT と GR の各々のキューがある特徴的な性質をもつ状態を繰り返すことが示される．それによって，各々が受理するパケットの数の比を帰納的に評価することが出来、GR の競合比が高々 14/11 であることを示すことが出来る。

4.2　証明

本証明においても，解析に影響はないことから，簡単の為，GR のみが受理するパケットを含む入力については解析の対象外とする．また，OPT のみが受理するパケットの存在しない様な入力の競合比は明らかに 1 となることから，解析の対象となる入力は必ず OPT のみが受理するパケットが存在するとする．ここで，証明を行っていくに当たり重要な時刻の定義を行う．OPT のみが受理するパケットを，OPT が初めて受理するイベントの発生する時刻を t_{L_0} とする．このとき，一般性を失わず，時刻 t_{L_0} に OPT のみが受理するパケットが到着するキューを $Q^{(2)}$ とし，時刻 $t>t_{L_0}$ において，初めて $h^{(2)}_{OPT}(t)=B$ となる時刻が存在するとき，そのイベントの発生する時刻を t_{B_0} とおく．

補題 4.2 $\sigma_{\overline{B}_0}$ を時刻 t_{B_0} が存在しない任意の入力とする．このとき，$T_{OPT}(\sigma_{B_0})/T_{GR}(\sigma_{B_0}) > T_{OPT}(\sigma_{\overline{B}_0})/T_{GR}(\sigma_{\overline{B}_0})$ が成立する様な時刻 t_{B_0} が存在する入力 σ_{B_0} が存在する．

時刻 t_{B_0} より後の OPT のみが受理するパケットの有無に応じた競合比の評価を行うために，ここで新たに時刻を定義し，時刻 t_{B_0} までを一区切りとして競合比の評価を行うことにする．そこで，時刻 t_{B_0} より後の時刻において，OPT のみが受理するパケットが存在するとき，OPT が初めてそれを受理するイベントの発生する時刻を t_{L_0} とする．また，時刻 $t_{L_0}-$ と同じ数の FS_{OPT} がキュー内に初めて生じるイベントの発生する時刻を t_{S_0} とおくことにする．

補題 4.3 $\sigma_{\overline{L}_1}$ を時刻 t_{L_1} が存在しない任意の入力とする．このとき，$T_{OPT}(\sigma_{\overline{L}_1})/T_{GR}(\sigma_{\overline{L}_1}) \le 5/4$ が成立する．

Proof. 時刻 $t_{L_0}-$ の FS_{OPT} の数である $f_{OPT}(t_{L_0}-)$ を x_0B ($x_0 \in (0,1)$) とおくことにする．

まず，$Q^{(2)}$ について考える．時刻 t_{L_0} までに，GR が $Q^{(1)}$ から送信するときに OPT が $Q^{(2)}$ から送信したパケットの数を x_0B+c_0 とすると，OPT が $Q^{(1)}$ から送信するときに GR が $Q^{(1)}$ から送信したパケットの数は c_0 となる．また，時刻 $t_{L_0}+$ における $Q^{(2)}$ 内のパケットについては，OPT の時刻 $t_{L_0}-$ における $Q^{(2)}$ に保持するパケットは $h^{(2)}_{OPT}(t_{L_0}-)=B-x_0B$ であり，GR は t_{L_0} の定義より $h^{(2)}_{GR}(t_{L_0}-)=B$ が成立している．更に，OPT が $Q^{(2)}$ の FS に時刻 $t_{B_0}+$ までに受理するパケットの数が x_0B である．次に，$Q^{(1)}$ について考える．時刻 t_{L_0} までに，GR が $Q^{(2)}$ から送信するときに OPT が $Q^{(1)}$ から送信したパケットの数は，GR のみが $Q^{(2)}$ から送信するパケット数に等しいので，c_0 となる．同様に，OPT が $Q^{(2)}$ から送信するときに GR が $Q^{(1)}$ から送信したパケットの数は x_0B+c_0 となる．次に，時刻 $t_{L_0}+$ における $Q^{(1)}$ 内のパケットに

ついて考える．時刻 t_{S_0} のイベントにおいて，GR は $Q^{(1)}$ からパケットを送信し OPT は $Q^{(2)}$ からパケットを送信している．これは，GR は必ずより多くパケットを保持するキューからパケットを送信するという性質から，$h^{(2)}_{GR}(t_{S_0}+) \geq h^{(1)}_{GR}(t_{S_0}+) \geq h^{(1)}_{OPT}(t_{s_0}+) + x_0B$ であることから ($h^{(1)}_{GR}(t_{S_0}-) = h^{(2)}_{GR}(t_{S_0}-)$ の場合にはこれは成立し得ないが，x_0B-1 とした上で以下と同様の解析を行うと，B の偶奇の場合分けによって同様の結果を得ることが出来る)，ここで，OPT について $h^{(1)}_{OPT}(t_{S_0}+) = d_0$ とおくと，$h^{(1)}_{GR}(t_{S_0}+) = d_0 + x_0B$ となる．また，$f_{GR}(t_{S_0}+) = x_0B$ より，$h^{(1)}_{OPT}(t_{S_0}+) = h^{(1)}_{GR}(t_{S_0}+) + x_0B = d_0 + 2x_0B$ が成立する．最後に OPT と GR が同じ時刻に同じキューから送信したパケットで，上記のキュー内のパケットとして挙げたパケットに含まれていないパケットの数を CM_0 とおくと，$\frac{T_{OPT}(\sigma_{B_0})}{T_{GR}(\sigma_{B_0})} = \frac{CM_0+c_0+d_0+2x_0B+B-x_0B+x_0B+_0B}{CM_0+c_0+d_0+x_0B+x_0B+B} = \frac{CM_0+c_0+d_0+3x_0+1}{CM_0+c_0+d_0+2x_0+1}$ が成立する．ここで，$CM_0 = c_0 = d_0 = 0$ とおくと，$h^{(1)}_{OPT}(t_{S_0}+) = d_0 + 2x_0B = 2x_0B \leq B$ より，$\frac{T_{OPT}(\sigma_{\overline{L}_1})}{T_{GR}(\sigma_{\overline{L}_1})} \leq \frac{3x_0+1}{2x_0+1} \leq \frac{5}{4}$ が成立する． □

さて，ここで改めて，時刻 t_{B_0} より後の OPT のみが受理するパケットが到着するイベントの発生時刻及び，OPT の一方のキューのバッファが一杯になるイベントの発生する時刻について定義する．時刻 t_{B_k} $(k = 0, 1, ...)$ 以後に，OPT のみが受理するパケットが存在するとき，OPT がそのパケットを初めて受理するイベントの発生する時刻を $t_{L_{k+1}}$ とおく．また，時刻 $t > t_{L_k}$ $(k = 1, 2, ...)$ において，初めて $h^{(j)}_{OPT}(t) = B$ $(j = 1$ もしくは $2)$ となる様な時刻が存在するとき，そのイベントの発生する時刻を t_{B_k} とおく．これらの定義を踏まえて，補題 4.2 を一般化しておく．

補題 4.4 $\sigma_{\overline{B}_k}$ を時刻 t_{L_k} $(k = 0, 1, ...)$ が存在して時刻 t_{B_k} が存在しない任意の入力とする．このとき，$T_{OPT}(\sigma_{B_k})/T_{GR}(\sigma_{B_k}) > T_{OPT}(\sigma_{\overline{B}_k})/T_{GR}(\sigma_{\overline{B}_k})$ が成立する様な時刻 $t_{B_{k-1}}$ が存在して時刻 t_{B_k} が存在する様な入力 σ_{B_k} が存在する．

ここで，時刻 t_{B_j} が存在する場合に，そのイベントの発生するキューを一方のキュー $Q^{(2)}$ に固定してしまうことを考える．即ち，$Q^{(1)}$ においてそのイベントが発生した場合，より高い競合比を得ることの出来る入力が存在することを示す．

補題 4.5 $\sigma_{\widehat{B}_{k+1}}$ を時刻 $t_{B_{k+1}}$ が存在し，$h^{(i)}_{OPT}(t_{B_k}) = h^{(j)}_{OPT}(t_{B_{k+1}}) = B$ $(i \neq j)$ となる任意の入力とする．このとき，$\frac{T_{OPT}(\sigma)}{T_{GR}(\sigma)} = \frac{T_{OPT}(\sigma_{\widehat{B}_{k+1}})}{T_{GR}(\sigma_{\widehat{B}_{k+1}})}$，$h^{(i)}_{OPT}(t_{B_k}) = h^{(j)}_{OPT}(t_{B_{k+1}}) = B$ $(i = j)$ が成立する様な入力 σ が存在する．

系 4.6 時刻 t_{B_k} が存在する任意の入力に対して，$h^{(2)}_{OPT}(t_{B_j}) = B$ $(j = 0, 1, ..., k)$ が成立する．

さて，これから最も重要な補題の証明を行うが，その前に時刻 $[t_{B_k}, t_{L_{k+1}}]$ の間の特徴的な時刻について定義しておくことにする．時刻 t_{L_j} $(j = 1, 2, ...)$ が存在するとき，時刻 $t_{L_j}-$ と同じ数の FS_{OPT} がキュー内に初めて生じるイベントの発生する時刻を t_{S_j} とおくことにする．また，時刻 t_{L_j} $(j = 1, 2, ...)$ が存在するとき，時刻 $t_{B_{j-1}}$ より後の時刻で，初めて $h^{(1)}_{GR}(t_{R_j}+) = h^{(2)}_{GR}(t_{R_j}+)$ が成立する様なイベントの発生する時刻を t_{R_j} とおく．

補題 4.7 $\sigma_{\overline{L}_{k+1}}$ を時刻 t_{L_k} $(k = 0, 1, 2, ...)$ が存在し時刻 $t_{L_{k+1}}$ が存在しない入力とする．このとき，$\frac{T_{OPT}(\sigma_{\overline{L}_{k+1}})}{T_{GR}(\sigma_{\overline{L}_{k+1}})} \leq \frac{\frac{5}{2}+k}{\frac{3}{2}+k+(\frac{1}{2})^{k+1}}$ が成立する．

Proof. まず，補題 4.3 より，時刻 $[0, t_{B_0}+]$ の間に受理するパケットの数はそれぞれ，OPT が $CM_0+c_0+d_0+3x_0B+B$，GR が $CM_0+c_0+d_0+2x_0B+B$ である．以降，時系列にキューの様子を

見ていくことにする．時刻 $(t_{B_0}+, t_{R_1}+]$ について考える．OPT は t_{R_1} の定義と $f_{GR}(t_{B_0}+) = x_0B$ より，$h^{(1)}_{GR}(t_{B_0}+) + x_0B \le h^{(2)}_{GR}(t_{B_0}+) = B$ であるから，GR は少なくとも $Q^{(2)}$ から x_0B 個のパケットを送信する．OPT は GR と同数のパケットを送信することになる．時刻 $(t_{R_0}+, t_{S_1}+]$ について考える．GR はより大きいキューを選んで送信を行う性質から，$Q^{(1)}$ と $Q^{(2)}$ を交代々々に選択してパケットを送信することになる．よって，OPT が $Q^{(2)}$ から送信するパケットを y_1B とする（$y_1 \le x_0B + d_0$）と，GR は必ず $\frac{y_1}{2}B$ だけは $Q^{(2)}$ からパケットを送信することになる．以上より，時刻 $(t_{S_1}+, t_{L_1}-]$ の間に，GR と OPT はパケットを $x_0B + \frac{y_1}{2}B$ だけ受理する．更に，時刻 $t_{L_1}-$ における FS_{OPT} の数は $f_{OPT}(t_{L_1}-) = \frac{y_1}{2}B$ であるから，時刻 $(t_{S_1}-, t_{B_1}+]$ までに OPT のみは $\frac{y_1}{2}B$ だけパケットを受理する．以降，同様に考える．即ち，時刻 $(t_{B_1}+, t_{R_2}+]$ に OPT と GR は $x_0B + \frac{y_1}{2}B$ のパケットを送信し，時刻 $(t_{R_0}+, t_{S_1}+]$ に OPT は y_2B，GR は $\frac{y_2}{2}B$ だけパケットを送信するといった具合である（$y_2 \le \frac{y_1}{2}$）．これにより，時刻 $t_{B_k}+$ までに，OPT は $CM + d_0 + 3x_0B + B + k(x_0 + y_1)B$，$GR$ は $CM + d_0 + 2x_0B + B + k(x_0 + y_1)B - \{1 - (\frac{1}{2})^k\}y_1B$ のパケットを受理することとなる（CM は上記の繰り返しの送信，受理したパケットに含まれていないパケットの数）．ここで，補題 4.3 の証明中にある様に，$d_0 + 2x_0 \le B$ であり，また，$y_1 \le x_0 + d_0$ であるから，$\frac{T_{OPT}(\sigma_{\overline{L}_{k+1}})}{T_{GR}(\sigma_{\overline{L}_{k+1}})} \le \frac{3x_0+1+k}{3x_0+k+(1-x_0)(\frac{1}{2})^k} \le \frac{\frac{5}{2}+k}{\frac{3}{2}+k+(\frac{1}{2})^{k+1}}$ □

上記の補題から定理 4.1 を言うことが出来る．

GR の下限についての証明は簡単なので省略する．

5 おわりに

本稿では，マルチキュースイッチモデルにおけるバッファ管理オンライン問題に対して，ある特定の場合における既存の競合比の上限を改良した．$m = 2$ の場合については，上下限を一致させることが重要な課題である．

References

[1] W. Aiello, Y. Mansour, S. Rajagopolan, and A. Rosen, *"Competitive Queue Policies for Differentiated Services"*, *IEEE INFOCOM*, 431–440, 2000.

[2] S. Albers and M. Schmidt, *"On the Performance of Greedy Algorithms in Packet Buffering"*, *In Proc. of 36th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 35–44, 2004.

[3] Y. Azar and A. Litichevskey, *"Maximizing Throughput in Multi-queue Switches"*, *In Proc. of 12th Annual European Symposium on Algorithms*, 53–64, 2004.

[4] Y. Azar and Y. Richter, *"Management of multi-queue switches in QoS networks"*, *In Proc. of 35th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 82–89, 2003.

[5] D. Sleator and R. Tarjan, *"Amortized efficiency of list update and paging rules"*, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol.E88-A(5), 1155–1165, 2005.

[6] M. Schmidt, *"Packet Buffering: Randomization Beats Deterministic Algorithms"*, *In Proc. of 22nd Annual International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, 293–304, 2005.

[7] D. Sleator and R. Tarjan, *"Amortized efficiency of list update and paging rules"*, *Communications of the ACM*, Vol.28(2), 202–208, 1985.